

Teoremas de singularidad de Penrose-Hawking

Trabajo para la asignatura de
Relatividad General

UC

Autor: Alberto Campuzano Solórzano
Curso 2025–2026

Correo:
alberto.campuzano@alumnos.unican.es

Resumen

Este trabajo es un viaje hacia los límites de la física moderna, de la más que adorada Relatividad General. Comenzaremos presentando a los arquitectos de esta revolución, Penrose y Hawking, para luego establecer las reglas: el Espacio-Tiempo de Einstein, donde la gravedad no es una fuerza, sino el tablero del juego curvándose. Desde ahí, analizaremos la dinámica de la materia con la ecuación de Raychaudhuri para entender por qué la gravedad actúa como una lente ineludible que lo enfoca todo. Veremos cómo esto conduce a la formación de superficies atrapadas —trampas de las que ni la luz escapa— y culminaremos enunciando los teoremas que demuestran que el Big Bang y los agujeros negros no son errores de cálculo, sino destinos geométricos inevitables.

© 2025 Alberto Campuzano Solórzano.

Este documento está licenciado bajo una **Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)**.

Puedes copiar, distribuir y modificar este contenido siempre que:

- des crédito a los autores originales,
- no lo uses con fines comerciales,
- y lo compartas bajo la misma licencia.

Para más información sobre la licencia, visita: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>



Índice general

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introducción | 1 |
| 1.1 | ¿Por qué este trabajo? | 1 |
| 1.2 | Conociendo un poco a nuestros protagonistas | 1 |
| 1.2.1 | Stephen Hawking | 2 |
| 1.2.2 | Roger Penrose | 2 |
| 1.3 | Estructura | 3 |
| 2 | Espacio-Tiempo de Einstein | 4 |
| 2.1 | Métrica y causalidad | 4 |
| 2.2 | Curvatura: El Tensor de Riemann | 5 |
| 2.3 | Las Ecuaciones de Campo de Einstein | 7 |
| 3 | La dinámica en el Espacio-Tiempo | 9 |
| 3.1 | Geodésicas | 9 |
| 3.2 | El papel de la materia y la energía | 10 |
| 3.3 | Puntos Conjugados y el Desastre | 11 |
| 3.4 | La Topología Causal: El Tablero de Juego | 12 |
| 4 | Singularidades y Superficies Atrapadas | 14 |
| 4.1 | La Patología del Espacio-Tiempo | 14 |
| 4.1.1 | Tipos de Singularidades | 14 |
| 4.2 | Incompletitud Geodésica | 15 |
| 4.3 | Superficies Atrapadas | 15 |
| 4.3.1 | El Caso Normal vs. El Caso Atrapado | 15 |
| 4.4 | El Horizonte Aparente y el Punto de No Retorno | 16 |
| 5 | Los Teoremas de Singularidad | 17 |
| 5.1 | Teorema de Penrose (1965): El Colapso Gravitatorio | 17 |
| 5.2 | Teorema de Hawking-Penrose (1970): La Singularidad Cosmológica | 17 |
| 5.3 | Conclusiones: El Fin de la Relatividad General | 18 |
| 5.4 | La Conjetura de la Censura Cósmica | 18 |
| 5.5 | Agradecimientos | 19 |
| | Bibliografía | 20 |

CAPÍTULO 1

Introducción

“Mi objetivo es simple. Es una comprensión completa del universo, por qué es como es y por qué existe en absoluto.”

Stephen Hawking.

1.1 ¿Por qué este trabajo?

Antes de comenzar a hablar de singularidades, el universo y todas las cosas que nos han traído hasta aquí ¹ me gustaría mostrar cuál fue mi motivación con este tema y dar así una pequeña y maléfica (depende desde donde se mire) recomendación literaria. Hace unos 5 años aproximadamente, un chico recibió el regalo de una amiga que pensó que como recién ingresado doblegradista de esta facultad agradecería leer un libro sobre física, *La naturaleza del espacio y el tiempo* de Stephen W. Hawking y Roger Penrose. Joven e iluso de mí, intenté leerlo, no comprendiendo ni la más mínima palabra una vez superada la portada y año tras año realizaba un intento por comprender de verdad lo que decía este libro. En segundo estudié topología y me vi un poco más cerca de conseguir mi objetivo. Resumiendo, a día de hoy estoy a punto de acabarlo. Lo más probable es que finalice el libro y nunca sea capaz de entender lo que estos dos *granujas* idearon, pero sin duda me ha servido como motivación para hacer este trabajo, aprender y adentrarme en la Relatividad General y sus misterios. Así pues, os dejo esa diabólica recomendación literaria, puede que nunca lleguéis a acabar el libro o sí, *todo es relativo* ².

1.2 Conociendo un poco a nuestros protagonistas

Para abordar el apasionante mundo de los agujeros negros y del Espacio-Tiempo es necesario conocer los actores principales del tema que queremos tratar. El título del presente trabajo parece ser autodescriptivo y así lo es. Por ello, antes siquiera de presentar el tema que vamos

¹No solo a que leáis este trabajo y sus infinitas notas a pie de página si no de verdad lo que nos ha llevado a estudiar Relatividad General.

²Siento el deber moral de decir que no todo es relativo y a hacer un llamamiento a todas las personas para corregir a quién fuera el *cuñao* que pronuncie esas terribles palabras *Ya decía Einstein que todo es relativo* o equivalencias tan terroríficas como esa.

a tratar me parece muy conveniente presentar una pequeña biografía³ de los autores de estos teoremas y de lo que han sido extensos debates, conferencias y artículos acerca de la naturaleza del espacio-tiempo.

1.2.1 Stephen Hawking

Stephen Hawking fue, probablemente, el último gran científico *rockstar* antes de la era de las redes sociales. Su vida es *vox populi* y ha sido retratada en innumerables libros, documentales y películas. Tras estudiar física en Oxford y doctorarse en Cambridge, Hawking destacó rápidamente en el campo de la cosmología relativista, especialmente en el análisis geométrico del universo temprano. A los 21 años le diagnosticaron ELA, enfermedad degenerativa para la cual le pronosticaron pocos años de vida. Sin embargo, su carrera científica se extendió durante más de medio siglo, y su enfermedad no hizo sino reforzar su personalidad, sentido del humor e inspirar en los demás un aliento de fuerza que seguro empujó y empuja a muchas personas a luchar por sus sueños.

En los años 60 y 70, Hawking adaptó las técnicas globales recientemente introducidas por Penrose al contexto cosmológico. Sus resultados mostraron que, bajo hipótesis de energía muy generales, un universo en expansión debía poseer necesariamente una singularidad inicial: el Big Bang. Poco después, en una de las contribuciones más influyentes de la física moderna, Hawking aplicó métodos semiclásicos de teoría cuántica de campos para demostrar que los agujeros negros emiten radiación térmica, cambiando para siempre nuestra comprensión del vínculo entre gravedad, termodinámica y física cuántica. Su colaboración con Penrose dejó como legado un conjunto de teoremas —los que estudiaremos en este trabajo— que establecieron una comprensión verdaderamente geométrica de las singularidades del espacio-tiempo. Hawking destacó por su habilidad para convertir ideas técnicamente complejas en conceptos físicos fundamentales, con consecuencias profundas tanto en cosmología como en física gravitatoria.

1.2.2 Roger Penrose

Roger Penrose, nacido en 1931, es uno de los pensadores más influyentes en la historia de la relatividad general. Matemático de formación, su enfoque creativo y profundamente geométrico ha transformado nuestra comprensión de la estructura causal del espacio-tiempo. Es el creador de los famosos mosaicos no periódicos que llevan su nombre, desarrollador del formalismo de los diagramas conformes —hoy llamados *diagramas de Penrose*— y el arquitecto conceptual detrás de nociones tan fundamentales como las *superficies atrapadas*, pieza central en la formulación moderna de las singularidades gravitatorias. Su trabajo de 1965 sobre el colapso gravitatorio marcó un antes y un después: por primera vez se demostró que los agujeros negros no son artefactos de la simetría esférica, sino una consecuencia inevitable de la relatividad general bajo condiciones muy amplias. Para ello combinó geometría diferencial, teoría de Morse, topología y estructura causal de una manera que cambió radicalmente el campo. Estas ideas serían el punto de partida para su colaboración con Hawking. Penrose recibió el Premio Nobel en 2020 por demostrar que la formación de agujeros negros es un proceso robusto y genérico dentro de la relatividad general.

³Aquí podríais pensar que lo hago para hablar de Hawking pero en nada vais a poder ver que mi fijación está más sobre el bueno de Penrose.

He de admitir que, si he incluido estas biografías, es porque Roger Penrose será probablemente uno de mis científicos favoritos y no podía dejar pasar la oportunidad de dar ciertos datos sobre él, aprovechando que sigue vivo y que aún concede entrevistas. Mantengo aún en la cabeza ciertas anécdotas que me gustaría compartir, ahí os van un par de ellas.

La primera de ellas nace de una charla en la que preguntan a Penrose cómo hace para seguir vital. Este responde que intenta salir a pasear todos los días, comer bien... lo que viene a ser una vida saludable. Cuando habla de los paseos menciona que tiene una forma particular de hacerlos: cada día decide tomar un camino distinto de manera que no sea *homótopo* al anterior⁴. Si eres un estudiante de matemáticas o tienes interés por ellas este dato sin duda se va a quedar para siempre en tu mente.

La segunda de las anécdotas me parece aún más bonita, ya que involucra a su hermano Oliver, que también es físico. En ella, haciendo honor a la pasión de Ramanujan por los números y otra vieja anécdota del genio indio⁵, menciona que cada cumpleaños se felicitan mutuamente con una carta en la que aparece alguna curiosidad matemática sobre el número de años que cumplen. Una tradición profundamente penrosiana: una vida entre geometría, creatividad y números.

1.3 Estructura

Aprovecho este pequeño hueco para dar unas nociones de la estructura del trabajo. Vamos a recorrer este camino de manera inductiva. Presentaremos el contexto donde se dan los teoremas, herramientas de la dinámica y la topología del universo para culminar con los enunciados y sus consecuencias. Adelantando un poco las conclusiones y por hacer mención a la demostración de los mismos cabe decir que la columna vertebral que utilizaron Penrose y Hawking fue la siguiente: Definieron el contorno que envuelven a nuestro Universo suponiendo que las condiciones que nos encontramos se satisfacen en el ámbito más general para así poder demostrar que si no se dieran las singularidades entonces llegaríamos a un absurdo. Esta idea es fascinante bajo mi punto de vista pues no utilizan una *reducción al absurdo* habitual, hacen uso de una *no reducción al absurdo*⁶. Dicho esto, comencemos.

⁴Evitando formalismos, que dos caminos o lazos sean homótopos representa la idea de que podamos mover nuestra cuerda que une los puntos de una a otra de manera continua, sin necesidad de romperla.

⁵Se dice que un día Hardy visitó a Ramanujan en el hospital, ya en el lecho de su muerte. Allí mencionó que el número del taxi en el que había venido era un tanto aburrido, a lo que Ramanujan exclamó que de eso ni hablar y empezó a detallar una lista de propiedades acerca del número en cuestión.

⁶¿Soy el único al que le ha parecido fascinante? Probablemente pero bueno, ye lo que hay.

Espacio-Tiempo de Einstein

Para ser conscientes de la magnitud de los teoremas de singularidad, primero debemos situarnos en el escenario físico donde estos tienen lugar. De este modo, y no como si fuera poco, comenzaremos por el concepto de Espacio-Tiempo.

2.1 Métrica y causalidad

Evitando recreaciones y palabrería que ya nos conocemos,¹ el Espacio-Tiempo no es plano. La métrica de Minkowski es lo que desearíamos que fuera para tener un espacio tetradimensional en el que todas las abstracciones funcionasen bien, sin embargo, no quiso ser así el Universo. Físicamente hemos postulado que el Espacio-Tiempo puede modelizarse como un subconjunto en el que la métrica varía suavemente. Esto es, en palabras técnicas² una *variedad diferenciable de dimensión 4*. De hecho, sin conocer la definición podemos dar en base a la etimología de los conceptos una idea intuitiva de lo que estamos tratando. Una variedad diferenciable será un conjunto no vacío \mathcal{M} al que podemos dotar de un conjunto llamado *atlas* (C^∞) que esta compuesto por aplicaciones llamadas *cartas*: $x_i : U \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se que así a priori suena todo muy raro pero los matemáticos saben poner nombre a las cosas³ e intuitivamente lo que estamos haciendo es coger es un conjunto abstracto y *cartografiarlo* como algo que conocemos muy bien: \mathbb{R}^n . Naturalmente han de satisfacerse condiciones de regularidad, poder recorrer todo el conjunto y más condiciones que nombraremos más adelante, a medida que cobren importancia.

Intentando no entrar en mucho detalle, las variedades se conciben como una generalización de la teoría de curvas y superficies y por tanto, de estas extensiones nacen los conceptos de *métrica* y *conexión*. La métrica es una generalización del concepto de primera forma fundamental de una superficie. A nosotros esto no nos va a interesar en demasía desde el punto de vista formal pero uno de los resultados más importantes y bonitos de la teoría de superficies nos dice que la primera forma fundamental es un concepto intrínseco de la misma, este es el teorema egregio de Gauss⁴ y nos viene a decir que podemos conocer cómo es nuestra superficie desde ella misma. Por otro lado las conexiones son a lo que nosotros hemos llamado *derivada covariante*. No son únicas y la que a nosotros nos concierne y quizás os suene es la *conexión de Levi-Civita*. Gracias a estos dos conceptos podremos abordar el *Transporte paralelo* y las *geodésicas* un poco más adelante.

¹Hemos tenido largo y tendido acerca de esto durante el curso.

²Para un físico, un matemático estaría aberrado.

³Pequeño chascarrillo, hay buenos nombres y malos nombres en todas las áreas científicas, y si no que le pregunten a la *geometría tropical*.

⁴Egregio proviene del latín *egregius* y quiere decir ilustre o insigne, por lo cual tiene pinta de ser un teorema importante, ¿no?

Descansando un poco de tanta matemática vamos a repasar el concepto de causalidad de manera breve, recuperando lo que ya conocemos para dejarlo como un remanente que retomaremos al final cuando estudiemos la completitud geodésica. La forma en la que determinamos la distancia entre dos sucesos infinitesimalmente cercanos será $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ por lo que el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ será primordial para la geometría del Universo. Sin embargo, y como es ampliamente sabido, el *intervalo* ds^2 es un invariante Lorentz por lo que, aun sin conocer la métrica de nuestro espacio podemos plantear un pequeño análisis cualitativo de esta cantidad. Esto es algo que no es novedoso para alguien con nociones básicas de Relatividad y es los tipos de intervalo:

- **Tipo Tiempo** ($ds^2 < 0$): Trayectorias de partículas masivas.
- **Tipo Nulo** ($ds^2 = 0$): Trayectorias de la luz.
- **Tipo Espacio** ($ds^2 > 0$): Eventos causalmente desconectados.

con estos conceptos podemos representar los conocidos conos de luz, que serán de gran utilidad a la hora de estudiar las trayectorias en el Espacio-Tiempo.

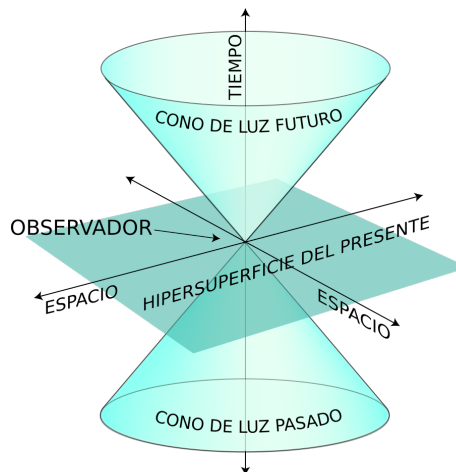


Figura 2.1: Imagen clásica del cono de luz tomada de Wikipedia.

2.2 Curvatura: El Tensor de Riemann

Ahora sí, volviendo a la cuestión con la que os introducido el capítulo (y bombardeado a nivel matemático), viene la pregunta del millón: ¿cómo distinguimos si el espacio está realmente curvado o si simplemente estamos usando unas coordenadas horribles? Durante este curso ya hemos visto unos pocos ejemplos de lo que es *vivir* en un espacio que parece plano o que no sabemos si lo es. Me estoy refiriendo al paraboloide aunque podemos encontrar numerosos ejemplos de espacios curvos. Por comentar, algunas superficies interesantes son las desarrollables, que, de manera coloquial, podemos generar doblando un plano sin llegar a romperlo ⁵. Centrándonos de nuevo en el tema que nos atañe, nuestro interés principal recae en la medición de si nuestro espacio es curvo o no, para ello primero debemos ser capaces de comparar

⁵Es bastante visual el estudio de las geodésicas en dichas superficies porque te permiten identificarlas con las rectas de un plano.

nuestros vectores y poder movernos por el espacio. En este sentido ya conocemos y os lo he adelantado hace unas pocas líneas, la respuesta geométrica reside en el *transporte paralelo*. Nuestra idea es clara, queremos ser capaces de transportar un vector sin variar su dirección a lo largo de una curva. Claramente, y por lo que viene toda la maquinaria matemática, es porque la curvatura del espacio nos impide hacer esto de manera trivial. Para encontrarnos con el concepto de transporte paralelo debemos recurrir a la derivada covariante o lo que previamente os he introducido como conexión. Esta no es más que una aplicación que cumple las propiedades que ya conocemos de la derivada habitual pero extendida al módulo de campos vectoriales sobre el anillo de funciones ⁶. Así, para mover un vector v^μ a lo largo de una curva $\gamma(\lambda)$ manteniéndolo "paralelo a sí mismo", exigimos que su derivada covariante a lo largo de la curva sea nula, es decir:

$$\frac{Dv^\mu}{d\lambda} \equiv \frac{\partial v^\mu}{\partial \lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} v^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial \lambda} = 0 \quad (2.1)$$

Aquí entran en juego el terror de todo estudiante de matemáticas de la UC, los *símbolos de Christoffel*: Γ^k_{ij} . Estos objetos tienen una definición formal en términos de la métrica y si recapitulamos un poco, os había comentado que un teorema decía que la métrica era un concepto intrínseco de la variedad, por lo que los símbolos de Christoffel también lo serán. Quizás debería haber advertido previamente que os sentáis porque ahora mismo tenemos algo muy gordo entre manos. Fijaos si esto es importante que es lo que nos permite plantearnos cómo es nuestro universo desde él mismo y realizar medidas que nos permitan conocer su geometría, si esto no fuera así, necesitaríamos ser capaces de abstraernos a dimensiones superiores para poder estudiar el Espacio-Tiempo, lo cual yo al menos veo difícil ⁷. El ser humano, bípedo implume según alguno de los antiguos sabios ⁸, puede conocer o siquiera plantearse como es la *variedad* en la que vive gracias a esto.

El problema —y aquí nace la definición operativa de curvatura— es que el transporte paralelo es dependiente del camino. Imaginemos que tenemos al intrépido Roald Amundsen sobrevolando el Polo Norte en 1926. Ahora toma un vector y lo transporta paralelamente hasta el Ecuador, recorre un tramo del Ecuador y vuelve al Polo Norte cerrando el bucle. Se encontrará con que el vector resultante no apunta en la misma dirección que el original, ha girado.

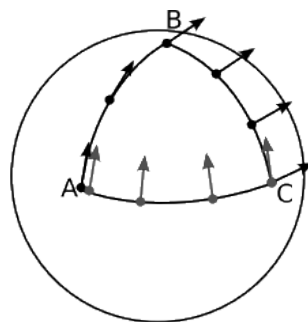


Figura 2.2: Figura que representa el viaje de nuestro descubridor [1].

⁶Quizás aquí me he pasado de técnico pero para que nos entendamos, un módulo es similar a un espacio vectorial que en vez de operar sobre un cuerpo lo hace sobre un anillo.

⁷Otra recomendación literaria en este aspecto es *Flatland, romance of many dimensions* de Edwin Abbott Abbott, leedlo si tenéis oportunidad.

⁸Fue Platón, a lo que el bueno de Diógenes de Sinope reaccionó llevando un gallo desplumado a la Academia de Platón para demostrar que esa definición era absurda.

Como respuesta a esta discrepancia aparece un viejo amigo nuestro, el *tensor de curvatura* o *tensor de Riemann* $R_{\sigma\mu\nu}^{\rho}$ ⁹. Este objeto mide exactamente la diferencia entre el vector original y el vector transportado a lo largo de un bucle cerrado infinitesimal definido por dos direcciones.

Con esto, cerramos la información sobre la curvatura intrínseca de la variedad. El tensor de Riemann nos dice todo lo que necesitamos saber sobre cómo se curva el espacio en cada punto y en cada dirección. Si el tensor de Riemann es cero en todas partes, entonces el espacio es plano (localmente isométrico a Minkowski). Si no, la variedad tiene curvatura y la gravedad está presente. Sin embargo, y como hemos visto el tensor de Riemann tiene muchas componentes de manera que nos *sobra información*. Para ello, contrayendo¹⁰ índices, podemos encontrar los *tensores de Ricci* y la *curvatura escalar*. Gracias a estos objetos hemos llegado al último punto que vamos a tratar del Espacio-Tiempo.

2.3 Las Ecuaciones de Campo de Einstein

Llegamos al corazón de la Relatividad General. Se que el camino ha sido duro y prometo que no va a haber muchas mas *mates*. Arribamos así a las ecuaciones que gobiernan la dinámica del Espacio-Tiempo, las ecuaciones de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

Cómo bien se ha repetido hasta la saciedad, y así lo vengo a promover yo, la belleza de estas ecuaciones radica, tanto en simplicidad¹¹ y en la enorme profundidad física que encierran los términos que las componen. A la izquierda tenemos la geometría, encapsulada en el *Tensor de Einstein* $G_{\mu\nu}$. Este tensor, construido de manera que $(\nabla^{\mu}G_{\mu\nu} = 0)$. A la derecha tenemos el contenido material: el *Tensor de Energía-Momento* $T_{\mu\nu}$. Aquí es donde metemos todo lo que hay en el universo: polvo, radiación, campos electromagnéticos, fluidos perfectos... Básicamente, todo lo que no es vacío.

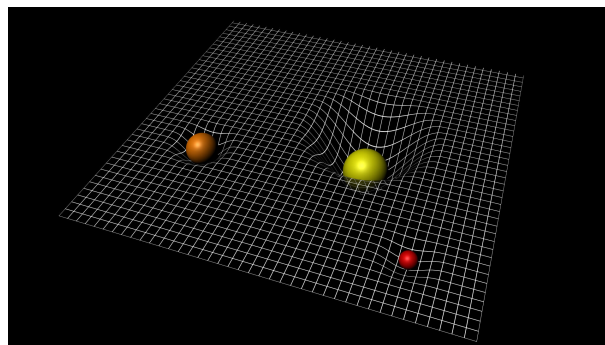


Figura 2.3: Esquema conceptual de la relación Materia-Geometría. [2].

Resolver este sistema es una pesadilla. Son 10 ecuaciones diferenciales no lineales acopladas. Encontrar soluciones exactas (como Schwarzschild o Kerr) requiere asumir simetrías

⁹Rigurosamente, el tensor de Riemann es la contracción del de curvatura con la métrica $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$

¹⁰Es muy curioso que lo que los físicos llaman *subir* y *bajar* índices se llamen en matemáticas *Isomorfismos musicales*. El isomorfismo bemol \flat se aplica de campos en formas diferenciales y su inverso es el sostenido \sharp .

¹¹Lo cuál a Paul Dirac hizo seguramente muy feliz.

esféricas o axiales perfectas, algo que el universo real rara vez nos regala con precisión infinita y como bien hemos sufrido este curso, ni con la más simple de las simetrías es sencillo operar con estos monstruos. Aquí es donde los teoremas de singularidad cobran sentido. Tanto Penrose como Hawking se dieron cuenta de que no necesitaban resolver las ecuaciones, les bastaba con imponer ciertas condiciones sobre $T_{\mu\nu}$ para deducir propiedades topológicas¹² sobre las trayectorias en el Universo.

¹²Ojo *cuidao* que ha salido una palabra muy importante: Topología

La dinámica en el Espacio-Tiempo

Acabamos de poner la lupa en la bonita relación entre la geometría y la materia de la que formamos parte. Así, para entender como se rompe nuestro mundo en singularidades debemos comprender como evoluciona. Como os he adelantado, la brillante idea de Penrose y Hawking radica en que no debemos resolver las ecuaciones de campo de Einstein para unas métricas específicas sino que el estudio de la topología es previo. Parece obvio entonces que de lo que vamos a acabar hablando es de la dinámica de la materia, en particular las geodésicas. En este capítulo introduciremos el concepto de geodésica, el papel de la materia y la energía junto con la ecuación de Raychaudhuri. No voy a derivar su formulación porque no hay ni tiempo suficiente ni el conocimiento pero si daremos una visión superficial de la misma ya que es el motor de los teoremas y finalizaremos el capítulo como el anterior, con un pequeño *cliffhanger*¹

3.1 Geodésicas

Creo que todos llegados a este punto sabemos dar una definición informal de lo que es una geodésica pero por si hay algún despistado o alguien que quiere saber un poco más vamos a repararlo un poco. Desde el punto de vista de la teoría de curvas y superficies, al menos así como lo estudié yo, la idea de geodésica nace de una manera muy natural. Dada una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, podemos definir dos curvaturas: la geodésica y la normal. La curvatura geodésica es la parte que es intrínseca mientras que la curvatura normal es la componente extrínseca, que mide cuánto se desvía la curva hacia afuera o hacia adentro de la superficie. De manera conceptual, si nos situamos en el Aula 8, la que ha sido nuestro *alma mater* este curso y queremos ir al parque de Las Llamas tendremos que elegir el camino. La forma mas rápida de ir sería trazar la línea recta que nos une y caminar hacia allí, lo que sería una geodésica en el plano, sin embargo, la geología² decidió que no pudiera ser así y tengamos que bajar. Creo que es evidente lo que quiero decir. Efectivamente la curvatura normal es ese *subir y bajar* ya sea para ir al estanque o ir a la montaña, mientras que la curvatura geodésica sería ese ir algo más recto, como sería cruzar por las paredes, o separarnos más esquivando los obstáculos.

Matemáticamente, que no nos vamos a librar de ello, la geodésica es aquella curva cuya curvatura geodésica es cero. Con la notación de variedades y derivadas covariantes que hemos introducido hasta el momento tendríamos que $\nabla_{\gamma}\gamma = 0$. Además, ya hemos utilizado en este curso y por tanto tampoco me voy a detener mucho en ello, las ecuaciones que debe satisfacer

¹Para el que no conozca esta expresión, viene a ser lo que hacen las series cuando acaban el capítulo con el protagonista en el suelo y sin saber si esta vivo o muerto para que de manera obligada des a ver el siguiente. En Juego de Tronos lo hacen en cada uno de los capítulos (hasta la temporada 8, en esa vieron que era tan mala que ni se molestaron en que quisiéramos ver más).

²Dichosa geología, tenía tanta razón Sheldon Cooper...

una geodésica son:

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2} + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tau} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tau} = 0 \quad (3.1)$$

donde podemos rápidamente observar que si los símbolos de Christoffel son nulos, entonces recuperamos:

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2} = 0 \Rightarrow x^\mu(\tau) = a_\mu + b_\mu(t)\tau$$

es decir, las geodésicas son rectas como era de esperar.

3.2 El papel de la materia y la energía

Ahora vamos a deducir la ecuación fundamental que, como se ha adelantado, da vida a los teoremas de singularidad. Dado un conjunto de materia —como puede ser el contenido del Universo— nos interesa estudiar cómo evoluciona la expansión θ a lo largo del tiempo propio τ de una congruencia de geodésicas temporales. Matemáticamente, esta evolución viene dada por la derivada covariante direccional $\frac{d\theta}{d\tau} = u^\alpha \nabla_\alpha \theta$, donde u^α es el campo de vectores tangente a la congruencia³. Sustituyendo la definición de la expansión, $\theta := \nabla_\mu u^\mu$, y operando, aparece de forma natural la necesidad de conmutar derivadas covariantes del tipo $\nabla_\alpha \nabla_\beta u^\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha u^\mu$. Es en este punto donde entra en juego la geometría del espacio-tiempo: la conmutación de derivadas covariantes introduce el *tensor de Riemann*⁴. Tras un poco de álgebra tensorial, que omito por la salud mental de todos, lector y escritor, pero que involucra trazas y contracciones usando la identidad de Ricci, llegamos a la *Ecuación de Raychaudhuri*:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \quad (3.2)$$

En esta expresión, $\sigma_{\mu\nu}$ es el tensor de cizalla y $\omega_{\mu\nu}$ el tensor de rotación de la congruencia. Analicemos el signo de cada término para ver si favorecen la expansión o el colapso (hacer $\theta \rightarrow -\infty$):

- I: $-\frac{1}{3}\theta^2$: Siempre negativo. Es un efecto puramente geométrico: si algo converge, tiende a converger más rápido.
- II: $-\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = -2\sigma^2$: Siempre negativo (o cero). Las fuerzas de marea deforman el volumen y, curiosamente, esta deformación siempre roba energía a la expansión, favoreciendo el colapso.
- III: $+\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} = 2\omega^2$: Siempre positivo. La rotación genera fuerzas centrífugas que se oponen al colapso. Esta es la razón por la que es difícil colapsar una nube de gas que rota rápido. Sin embargo, los teoremas de singularidad asumen que la rotación no es suficiente para vencer a la gravedad.

³Aquí he omitido la definición de congruencia para no extenderme pero una *congruencia* es una familia continua de curvas que llena una región del espacio-tiempo sin intersectarse, de modo que por cada punto pasa una única curva de la familia. En relatividad general, las congruencias de geodésicas describen el movimiento colectivo de partículas libres: cada curva individual es una geodésica y el campo vectorial tangente u^μ codifica la evolución local del haz de trayectorias. El estudio de la expansión, cizalla y rotación de una congruencia permite analizar cómo la geometría del espacio-tiempo influye en la separación entre geodésicas vecinas.

⁴Véase la nota al pie donde se define el tensor de curvatura y su relación con la conmutación de derivadas covariantes.

IV: $-R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$: Este es el término crucial. Relaciona la geometría con la materia.

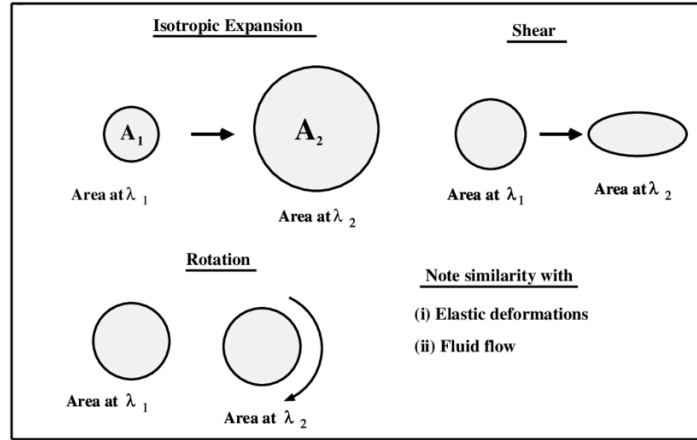


Figura 3.1: Diagrama de los efectos de la ecuación de Raychaudhuri [3].

Así, como acabamos de deducir del análisis cualitativo de los términos de la ecuación de Raychaudhuri, para que se favorezca el colapso, es decir, que $\frac{d\theta}{d\tau} < 0$ necesitamos que:

$$R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0$$

Esta desigualdad es lo que se conoce como *condición de energía fuerte* (SEC por sus siglas en inglés). Volviendo a las ecuaciones de Einstein (Ecuación (2.2)) tenemos que

$$(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})u^\mu u^\nu \geq 0 \iff \rho + 3p \geq 0$$

Es decir, si la materia cumple esto entonces la gravedad siempre actúa como una lente convergente. Bien, pues como era de esperar, básicamente porque si no esto no se habría escrito, la materia ordinaria lo hace, de modo que podemos seguir por este camino⁵.

3.3 Puntos Conjugados y el Desastre

Como anticipo de lo que se viene pongámonos en el siguiente caso: Asumamos que la vorticidad es nula y la condición de energía fuerte, entonces tenemos:

$$\frac{d\theta}{d\tau} \leq -\frac{1}{3}\theta^2$$

Esta ecuación diferencial simple tiene una solución inquietante. Si en un instante inicial $\tau = 0$ la congruencia está convergiendo ($\theta_0 < 0$), entonces integrando la inecuación obtenemos que θ debe diverger a $-\infty$ en un tiempo finito:

$$\tau \leq \frac{3}{|\theta_0|}$$

⁵En este sentido existe también la condición de energía débil (WEC) que es similar a la anterior: $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0$. Hay resultados que la involucran pero como el tiempo es finito y acotado no podemos dispersarnos mucho más.

Este punto donde $\theta \rightarrow -\infty$ se llama *punto conjugado*. Físicamente, significa que las geodésicas vecinas se han cruzado en un mismo punto, lo que implica que el volumen del fluido se ha hecho cero. Podríais pensar: "Bueno, ¿y qué? En óptica los rayos de luz se cruzan en el foco y luego siguen tan tranquilos". El problema es que en la geometría lorentziana, la existencia de un punto conjugado tiene consecuencias catastróficas para la causalidad: una geodésica deja de ser la curva de máxima longitud propia entre dos puntos una vez que cruza un punto conjugado⁶. Y aquí es donde el problema geométrico se convierte en un problema topológico.

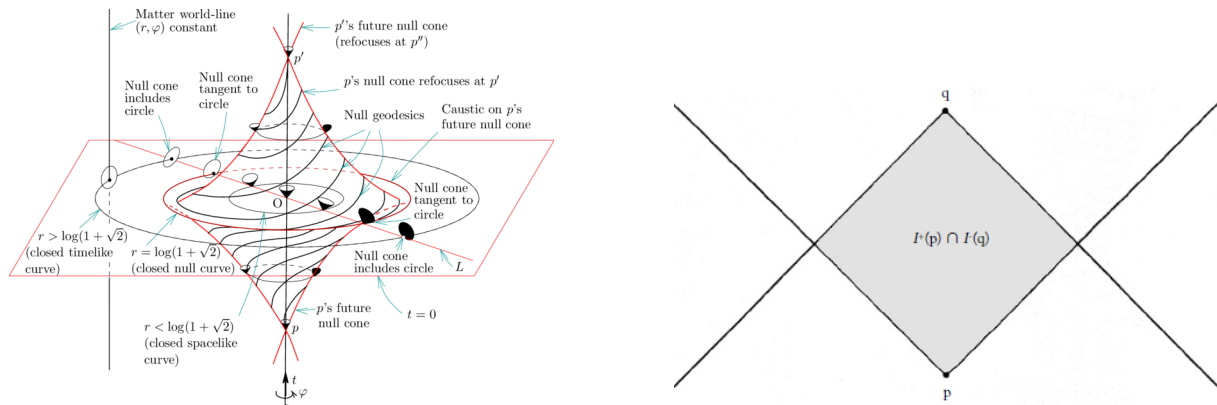
3.4 La Topología Causal: El Tablero de Juego

Para que los teoremas de singularidad funcionen, no basta con que la gravedad atraiga; necesitamos que el "tablero de juego" (el espacio-tiempo) no tenga trampas. La estructura causal es el conjunto de reglas que nos dicen qué eventos pueden influir en cuáles. Definimos el *futuro cronológico* de un punto p , denotado $I^+(p)$, como el conjunto de todos los puntos a los que podemos llegar viajando más despacio que la luz (curvas temporales). Si incluimos a la luz, tenemos el *futuro causal* $J^+(p)$. La condición más fuerte y necesaria que imponen Penrose y Hawking es la *Hiperbolicidad Global*. Un espacio-tiempo es globalmente hiperbólico si es, en esencia, totalmente determinista. Esto implica dos cosas:

- I: **Sin viajes en el tiempo:** No existen curvas temporales cerradas. Si las hubiera, la causalidad se rompería y podríamos hacer cosas como leer este trabajo antes de que lo escriba, lo cual sería un poco perturbador⁷.
- II: **Compacidad de los diamantes causales:** Para cualesquiera dos puntos p y q , la intersección de los conos de luz $J^+(p) \cap J^-(q)$ debe ser compacta (cerrada y acotada).

⁶Esto es análogo a lo que pasa en la esfera: el camino más corto entre el Polo Norte y el Sur es un meridiano. Pero si sigues el meridiano más allá del Polo Sur, dejas de minimizar la distancia.

⁷Podéis indagar un poco más en este tema yendo a la página de wikipedia del *Universo de Gödel*[4]



(a) Espacio-tiempo con curvas temporales cerradas, donde la estructura causal permite trayectorias temporales que regresan al mismo evento.

(b) Diamante causal definido por la intersección $J^+(p) \cap J^-(q)$, región que se exige compacta en espacios-tiempo globalmente hiperbólicos.

Figura 3.2: Diagramas de la estructura causal del espacio-tiempo: (derecha) diamante causal asociado a dos eventos p y q [5] e (izquierda) presencia de curvas temporales cerradas en el Universo de Gödel [6] y violación de la causalidad, podemos encontrar curvas de tipo tiempo que se cierran sobre si mismas de manera que podríamos recibir un mensaje antes de enviarlo o paradojas temporales escalofriantes.

Esta propiedad de hiperbolicidad global es vital porque garantiza la existencia de una *Superficie de Cauchy*: una *foto instantánea* de todo el universo tal que cualquier curva causal la atraviesa una sola vez.

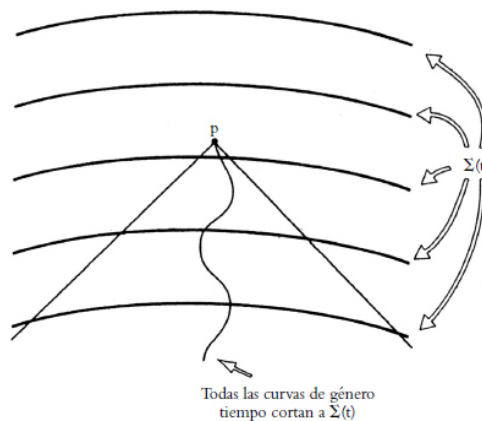


Figura 3.3: Representación de un espacio globalmente hiperbólico foliado por superficies de Cauchy Σ_t [5].

El *cliffhanger* que os prometí es el siguiente: Los teoremas de singularidad funcionan demostrando una contradicción irresoluble. La gravedad atractiva (Raychaudhuri + Energía Fuerte) fuerza la aparición de puntos conjugados. La topología bien comportada (Hiperbolicidad Global) exige que las geodésicas maximicen la longitud y no tengan puntos conjugados. La única forma de romper esta paradoja es que el espacio-tiempo se *rompa* antes de llegar a esa contradicción. Es decir, que las geodésicas se corten abruptamente: una singularidad.

Singularidades y Superficies Atrapadas

Llegamos así al último paso del camino¹. Vamos a visitar uno de los conceptos más escu- rridizos y fascinantes de la física teórica. Hasta ahora, hemos hablado de la geometría del espacio-tiempo como algo suave, continuo y bien comportado. Pero las ecuaciones de Einstein permiten soluciones donde esta suavidad se rompe. En este capítulo, diseccionaremos qué significa realmente que el espacio-tiempo tenga una singularidad y presentaremos la herramienta geométrica clave diseñada por Penrose para detectarlas: la superficie atrapada.

4.1 La Patología del Espacio-Tiempo

La primera pregunta que nos hacemos, o creo yo deberíamos es ¿Qué es una singularidad? La primera respuesta que se nos viene a la cabeza sería decir 'Un punto donde la curvatura se va a infinito'. Esto, rigurosamente, es incorrecto. Si el tensor de Riemann diverge en un punto p , entonces el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ no está bien definido en p . Por definición, una variedad diferenciable \mathcal{M} consiste solo en los puntos donde la métrica es suave. Por tanto, la singularidad no es un punto del espacio-tiempo; es, en cierto sentido, un *agujero* o un *borde* donde el espacio-tiempo termina. He de admitir que esto es quizás muy *quisquilloso* y me recuerda al eterno debate de si la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en su dominio, pues si tenemos en cuenta que $\mathfrak{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces técnicamente lo es. Sin embargo y evitando debates clásicos podemos distinguir dos tipos de singularidades, de esto ya nos ha hablado Diego y por ello no quiero extenderme mucho.

4.1.1 Tipos de Singularidades

1. **Singularidades de Coordenadas:** Son fallos del sistema de cartas elegido, no del espacio-tiempo en sí. El ejemplo clásico es el horizonte de sucesos del agujero negro de Schwarzschild ($r = 2M$). En las coordenadas originales de Schwarzschild, la componente g_{rr} se hace infinita. Sin embargo, calculando invariantes de curvatura como el escalar de Kretschmann $K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$, vemos que $K(2M) = \frac{3}{4M^4}$, que es perfectamente finito. Un cambio a coordenadas de Eddington-Finkelstein o Kruskal-Szekeres elimina esta singularidad aparente.
2. **Singularidades de Curvatura (Físicas):** Son aquellas que no pueden eliminarse con ningún cambio de coordenadas. En Schwarzschild, cuando $r \rightarrow 0$, el invariante $K \rightarrow \infty$. Aquí, las fuerzas de marea se vuelven infinitas, destrozando cualquier objeto físico. Otro ejemplo es la singularidad del Big Bang en la métrica FLRW, donde el factor de escala $a(t) \rightarrow 0$ y la densidad de energía $\rho \rightarrow \infty$.

¹Hubiera quedado mejor decir escalón porque esto ha requerido de una buena paciencia como es subir a un quinto sin ascensor, pero tampoco podemos desanimarnos estando tan cerca del final.

Sin embargo, hay singularidades más sutiles, como las *singularidades cónicas*, donde la curvatura no diverge pero el espacio termina en una punta (como la punta de un cono de papel), impidiendo que pasemos por ahí. Esto motivó la búsqueda de una definición más general.

4.2 Incompletitud Geodésica

La definición moderna de singularidad, adoptada por Penrose, Hawking y Geroch, no depende de la curvatura, sino de la *navegabilidad* del espacio-tiempo.

Definición 4.2.1 (Incompletitud Geodésica). Un espacio-tiempo (\mathcal{M}, g) es singular si es *geodésicamente incompleto*. Esto significa que existe al menos una geodésica (tipo tiempo, nula o espacial) $\gamma(\lambda)$ que no puede extenderse para todos los valores del parámetro afín $\lambda \in \mathbb{R}$.

Físicamente, esto implica la existencia de historias truncadas.

- Si es una geodésica temporal incompleta hacia el futuro, significa que un observador en caída libre dejaría de existir abruptamente después de un tiempo propio finito.
- Si es hacia el pasado, implica que el observador "surgió" de la nada hace un tiempo finito (Big Bang).

4.3 Superficies Atrapadas

El concepto revolucionario de Penrose es la *Superficie Atrapada Cerrada*. Imaginemos una esfera \mathbb{S}^2 en el espacio-tiempo. Normalmente, los rayos de luz que salen hacia fuera divergen (aumentan su área) y los que van hacia dentro convergen. Sin embargo, en una región de gravedad extrema, los conos de luz se inclinan tanto hacia el interior que ambos frentes de onda (el saliente y el entrante) disminuyen su área. Para entenderla, consideremos la superficie \mathbb{S}^2 inmersa en nuestro espacio-tiempo 4D. En cada punto de la esfera, podemos lanzar rayos de luz en dirección ortogonal un haz de rayos salientes (hacia fuera), con vector tangente nulo l^μ y un haz de rayos entrantes (hacia dentro), con vector tangente nulo n^μ . De estos haces, podemos calcular su expansión escalar, $\theta_{(l)}$ y $\theta_{(n)}$, que miden si el área del frente de onda de luz aumenta o disminuye.

4.3.1 El Caso Normal vs. El Caso Atrapado

1. **Región Normal (Espacio Plano):** Si encendemos una bombilla esférica, la luz que sale se expande ($\theta_{(l)} > 0$) y la luz que hipotéticamente viniera hacia el centro se contraería ($\theta_{(n)} < 0$).
2. **Región Atrapada:** Imaginemos ahora que la gravedad es tan intensa que curva el espacio-tiempo cerrándolo sobre sí mismo. En esta situación, ambos haces de luz convergen. Incluso los rayos que intentan escapar hacia el infinito ven su área disminuir debido al intenso enfoque gravitatorio.

$$\theta_{(l)} < 0 \quad \text{y} \quad \theta_{(n)} < 0 \tag{4.1}$$

Una superficie S que cumple esta condición se llama *superficie atrapada*. Una vez que se forma una superficie así (por ejemplo, durante el colapso de una estrella masiva que cruza su radio de Schwarzschild), la estructura causal del espacio-tiempo cambia radicalmente.

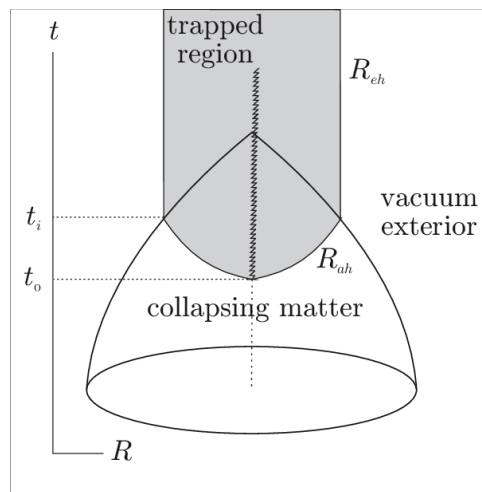


Figura 4.1: Diagrama de una superficie atrapada. Los conos de luz sobre la superficie S están tan inclinados que cualquier rayo de luz futuro apunta hacia radios menores ($r \rightarrow 0$) [7].

4.4 El Horizonte Aparente y el Punto de No Retorno

La frontera de la región que contiene superficies atrapadas lo denominamos como *horizonte aparente* y a menudo coincide o está cerca del horizonte de sucesos. Sin embargo, es un concepto local que cada observador podría, de manera teórica, medir (por ejemplo observando la convergencia de los rayos de luz en sus sistema local) mientras que el horizonte de sucesos es un concepto global. La existencia de una superficie atrapada implica que el volumen interior está condenado a reducirse a cero. Si combinamos esto con la ecuación de Raychaudhuri (que dice que la gravedad acelera la convergencia), llegamos a la conclusión de que la convergencia se vuelve infinita en un tiempo finito. Este es el preludeo geométrico inevitable de la singularidad.

Los Teoremas de Singularidad

Hemos llegado por fin a la cima de la montaña. Habiendo preparado el terreno con la geometría (superficies atrapadas) y la dinámica (Raychaudhuri), estamos en posición de enunciar los teoremas que cambiaron la cosmología y la astrofísica. Lo que estos teoremas demuestran, por reducción al absurdo, es que la incompletitud geodésica no es una rareza de soluciones con simetría perfecta, sino el destino genérico de la materia gravitatoria bajo condiciones razonables.

5.1 Teorema de Penrose (1965): El Colapso Gravitatorio

Este fue el primer teorema que prescindió de la asunción de simetría (como la esférica), aplicándose a procesos de colapso realistas.

Teorema 5.1.1 (Penrose). *Sea (\mathcal{M}, g) un espacio-tiempo conexo tal que:*

1. *Satisface la Condición de Energía Nula ($R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$ para todo vector nulo k^μ).*
2. *Es globalmente hiperbólico con una superficie de Cauchy no compacta Σ .*
3. *Contiene una superficie atrapada cerrada \mathcal{T} .*

Entonces, \mathcal{M} contiene al menos una geodésica nula incompleta hacia el futuro.

5.2 Teorema de Hawking-Penrose (1970): La Singularidad Cosmológica

Mientras Penrose miraba hacia el futuro de las estrellas, Hawking generalizó el resultado para mirar hacia el pasado del universo, legitimando el Big Bang.

Teorema 5.2.1 (Hawking-Penrose). *Sea (\mathcal{M}, g) un espacio-tiempo tal que:*

1. *Satisface la Condición de Energía Fuerte ($R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0$ para todo vector temporal u^μ).*
2. *Satisface la condición genérica (cada geodésica siente algo de curvatura, $k_{[\alpha}R_{\beta]\gamma\delta[\epsilon}k_{\sigma]} \neq 0$).*
3. *Cumple la condición de cronología (no existen curvas temporales cerradas).*
4. *Contiene, al menos, uno de los siguientes elementos:*
 - *Una superficie atrapada cerrada.*
 - *Un punto p tal que la convergencia de todas las geodésicas pasadas desde p se vuelve infinita.*

Entonces, (\mathcal{M}, g) es geodésicamente incompleto.

5.3 Conclusiones: El Fin de la Relatividad General

Como ya se ha mencionado, la potencia de estos teoremas reside en su generalidad y en la no resolución de las ecuaciones de campo de Einstein. Gracias ellos no sabemos cómo es una singularidad ni sus propiedades pero sabemos que es el final u origen del camino. Creo que es el momento de detenernos y reflexionar un poco acerca del significado epistemológico de esto, porque su profundidad es magnífica. El propio Hawking estaba obsesionado con el inicio y final del tiempo, de hecho parte de sus teoremas y teorías iban en busca de demostrar que no es necesario una deida Creadora si no que el Universo tiene origen y final de manera autónoma. La demostración de la existencia de sigularidades que nos devuelve Penrose y su origen por el de Hawking no para de repetirnos que nuestra teoría deja de ser válida en los puntos singulares y más aún, que estos no son errores, son destinos impenables de nuestro Universo y que tenemos que convivir con ellos.

Intentando hacer un paralelismo, cuando se dio la catástrofe del ultravioleta y la física clásica fallaba, parecía evidente que una nueva teoría era necesaria, naciendo la cuántica. A día de hoy son numerosos los intentos de unificación o de generalizaciones mayores como la teoría de cuerdas. Estas teorías están *estancadas* y seguimos haciendo uso de la *vieja escuela* porque al fin y al cabo, el mundo en el que vivimos no es una singularidad (o eso creo) y por ello no tiene mayor trascendencia para nosotros. Sin embargo, y quizás sea mi punto de vista sesgado por mi pasión por este tema, debería inquietarnos tanto que no sepamos como tratar las singularidades como no saber si mañana nos subirán los impuestos o si la barra de pan ya estará por los 2 euros. De todos modos, estas son las consecuencias de los teoremas e independientemente de la importancia o valor que le demos, así ha decidido ser nuestro Universo y a su merced estamos nosotros, unos homínidos evolucionados que intentan entenderlo.

5.4 La Conjetura de la Censura Cósmica

Para finalizar este trabajo y abriendo la puerta a un tema fascinante, hemos visto como los teoremas de Penrose y Hawking nos predicen que las singularidades aparecerán en nuestro Universo y más aún, que podemos venir de una. Sin embargo, queda como cuestión qué pasa en ellas y si podremos verlas.

Una singularidad "desnuda"(sin horizonte de sucesos) sería catastrófica para la ciencia. Como en la singularidad las leyes físicas se rompen, de ella podría salir cualquier cosa (información, partículas, caminantes blancos...) sin causa previa, destruyendo el determinismo en todo el universo. Para dormir tranquilos, Roger Penrose propuso la *Conjetura de la Censura Cósmica*:

"La naturaleza aborrece una singularidad desnuda."

En su versión débil, esta conjetura establece que, partiendo de condiciones iniciales físicas razonables, las singularidades que se formen siempre estarán ocultas tras un *Horizonte de Sucesos*, quedando invisibles para el observador en el infinito. Aunque es un problema abierto en matemáticas, la física teórica moderna confía en que Penrose, una vez más, tenga razón. De no ser así, perderíamos la capacidad de predecir, y eso es un precio demasiado alto a pagar.

Bibliografía

- [1] B. Crowell, *3.3: Nociones afines y transporte paralelo*, LibreTexts Español, s.f. dirección: [https://espanol.libretexts.org/Bookshelves/Fisica/Relatividad/Relatividad_General_\(Crowell\)/03%3A_Geometr%C3%ADa_Diferencial/3.03%3A_Nociones_afines_y_transporte_paralelo](https://espanol.libretexts.org/Bookshelves/Fisica/Relatividad/Relatividad_General_(Crowell)/03%3A_Geometr%C3%ADa_Diferencial/3.03%3A_Nociones_afines_y_transporte_paralelo) (cit en pág. 6).
- [2] European Space Agency y C. Carreau. “Spacetime curvature”. Impresión artística. Créditos: ESA-C.Carreau, ESA. (sep. de 2015), dirección: https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2015/09/Spacetime_curvature (visitado 03-10-2025) (cit en pág. 7).
- [3] S. Kar y S. Sengupta, “The Raychaudhuri equations: A Brief review”, *Pramana*, vol. 69, dic. de 2006. DOI: 10.1007/s12043-007-0110-9. dirección: https://www.researchgate.net/figure/llustrating-expansion-rotation-and-shear_fig2_1972061 (cit en pág. 11).
- [4] Wikipedia, *Universo de Gödel — Wikipedia, La enciclopedia libre*, 2025. dirección: https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Universo_de_G%C3%B6del&oldid=165422615 (cit en pág. 12).
- [5] S. W. Hawking y R. Penrose, *The Nature of Space and Time*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1996, Lectura obligatoria (y sufrida) para este trabajo. (cit en pág. 13).
- [6] I. Némethi, J. Madarász, H. Andréka y A. Andai, “Visualizing some ideas about Gödel-type rotating universes”, en dic. de 2010. dirección: https://www.researchgate.net/figure/Goedels-universe-in-co-rotating-cylindric-polar-coordinates-t-r-ph-Irrelevant_fig1_23419658 (cit en pág. 13).
- [7] D. Malafarina y P. Joshi, “Thermodynamics and gravitational collapse”, jun. de 2011. dirección: https://www.researchgate.net/figure/Collapse-leading-to-a-naked-singularity-The-trapped-surfaces-form-at-the-same-time-of_fig2_51912217 (cit en pág. 16).
- [8] T. Kokubu, K. Kyutoku, K. Kohri y T. Harada, *Effect of Inhomogeneity on Primordial Black Hole Formation in the Matter Dominated Era*, oct. de 2018. DOI: 10.48550/arXiv.1810.03490. dirección: https://www.researchgate.net/figure/Penrose-diagram-of-the-black-hole-formation-left-the-naked-singularity-formation_fig3_328161165 (cit en pág. 19).