Problema del mes Febrero 2025

Alberto Campuzano

Marzo 2025

Ejercicio: S-053. Puntos de abscisas distintas

Ejercicio. *Si una línea recta corta a la curva $y = \sqrt[3]{x^2}$ en tres puntos con abscisas distintas $x_1 \neq x_2 \neq x_3$, entonces*

$$\sqrt[3]{\frac{x_2x_3}{x_1^2}} + \sqrt[3]{\frac{x_3x_1}{x_2^2}} + \sqrt[3]{\frac{x_1x_2}{x_3^2}} \text{ \textit{es constante.}}$$

Demostración. En primer lugar, vamos a desarrollar brevemente la ecuación dada por el enunciado, de modo que:

$$\sqrt[3]{\frac{x_2x_3}{x_1^2}} + \sqrt[3]{\frac{x_3x_1}{x_2^2}} + \sqrt[3]{\frac{x_1x_2}{x_3^2}} = \frac{(x_2x_3)^{1/3} \cdot x_2{x_3}^{2/3} + \cdots + (x_1x_2)^{1/3} \cdot x_1{x_2}^{2/3}}{x_1^{2/3}x_2^{2/3}x_3^{2/3}}$$

$$= \frac{x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2}{x_1^{2/3}x_2^{2/3}x_3^{2/3}}$$

Ahora, sea la recta $\tilde{y} = mx+n$, igualamos las expresiones de ambas funciones, teniendo que

$$\sqrt[3]{x^2} = mx + n \Rightarrow x^2 = (mx+n)^3 \Rightarrow (mx+n)^3 - x^2 = 0$$

Desarrollando ahora el cubo llegamos al siguiente polinomio

$$p(x) = m^3x^3 + (3mn^2n - 1)x^2 + 3mn^2x + n^3$$

cuyas raíces, por construcción, son x_1, x_2, x_3. Recordamos ahora las relaciones de Cardano-Vieta para un polinomio de grado 3:

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_3(x_1 + x_2 + x_3) \\ a_1 &= a_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ a_0 &= -a_3(x_1x_2x_3) \end{aligned}$$

Donde $a_0 = m^3, a_2 = (3m^2n - 1), a_1 = 3mn^2$ y $a_0 = n^3$. Atendiendo a las dos últimas ecuaciones tenemos que

$$
\begin{aligned}
3mn^2 &= m^3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\
n^3 &= -m^3(x_1x_2x_3)
\end{aligned}
$$

Antes de seguir debemos hacer esta pequeña comprobación

$m \neq 0$ La curva $y = \sqrt[3]{x^2}$ es simétrica respecto del eje de ordenadas, por lo que si $m = 0$, entonces $y = n$ sería una horizontal que corta a la curva, y por simetría de esta, los puntos de corte irían por pares, si x_1 corta, entonces $-x_1$ también, no pudiendo tener exactamente 3 raíces reales (no puede haber más de tres porque hemos visto que tenemos un polinomio de variable real de grado 3).

$n \neq 0 \vee x_i = 0$ En este caso, que $x = 0$ sea una raíz es equivalente a que $n = 0$, ya que la curva en $x = 0 = y$ y la recta pasa por $y = 0 \iff n = 0$. Tratamos sin pérdida de generalidad que $m > 0$ ya que por simetría se obtiene el caso contrario. Si la recta pasa por el origen, tenemos que ambas funciones son crecientes y de curvatura no cambiante, 0 para la recta y < 0 para la curva, por lo que, si m es suficientemente grande solo tendremos un punto de corte ($x = 0$) y si m es suficientemente pequeño dos.

En la siguiente figura se muestran las diferentes casuísticas, pueden tratarse con más rigor obteniendo las derivadas pero no creo que sea necesario:

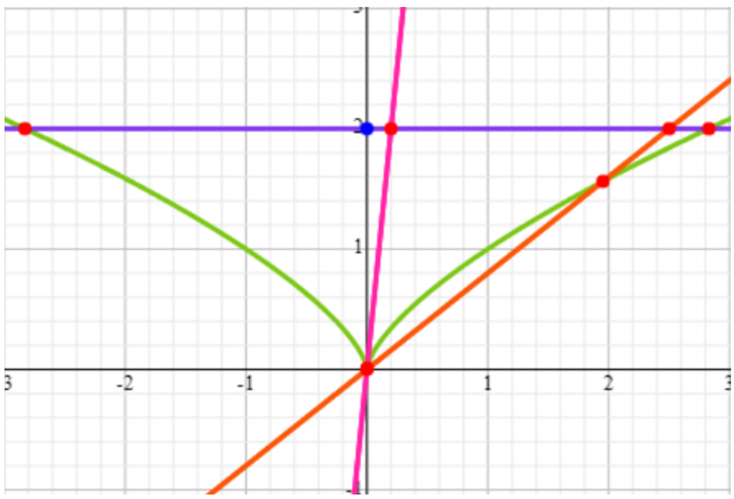

Figura 1: En verde se muestra la curva, en azul una recta constante de altura $y = 2$, en rojo $y = mx$ con $m = 0{,}8$ de modo que se producen dos puntos de corte y en rosa $m = 10$ de tal forma que hay solamente uno.

Así pues, volviendo a las ecuaciones resultantes de Cardano-Vieta, como $m \neq 0, n \neq 0 \wedge x_i \neq 0 \forall i \in \{1,2,3\}$, podemos elevar a la (2/3) la última expresión y dividirlas, obteniendo que:

$$\frac{3mn^2}{n^2} = \frac{m^3}{m^2} \cdot \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1^{2/3}x_2^{2/3}x_3^{2/3}}$$

de donde, comparando con el primer desarrollo realizado, concluímos que

$$\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1^2x_2^2x_3^2} = 3 = C^{te}$$

$\square$